

LOKALNA FRAKTALNOŚĆ JAKO NARZĘDZIE DO OCENY PROFILU NAWIERZCHNI KOLEJOWEJ

Piotr LESIAK

Piotr.Lesiak@wsei.pl

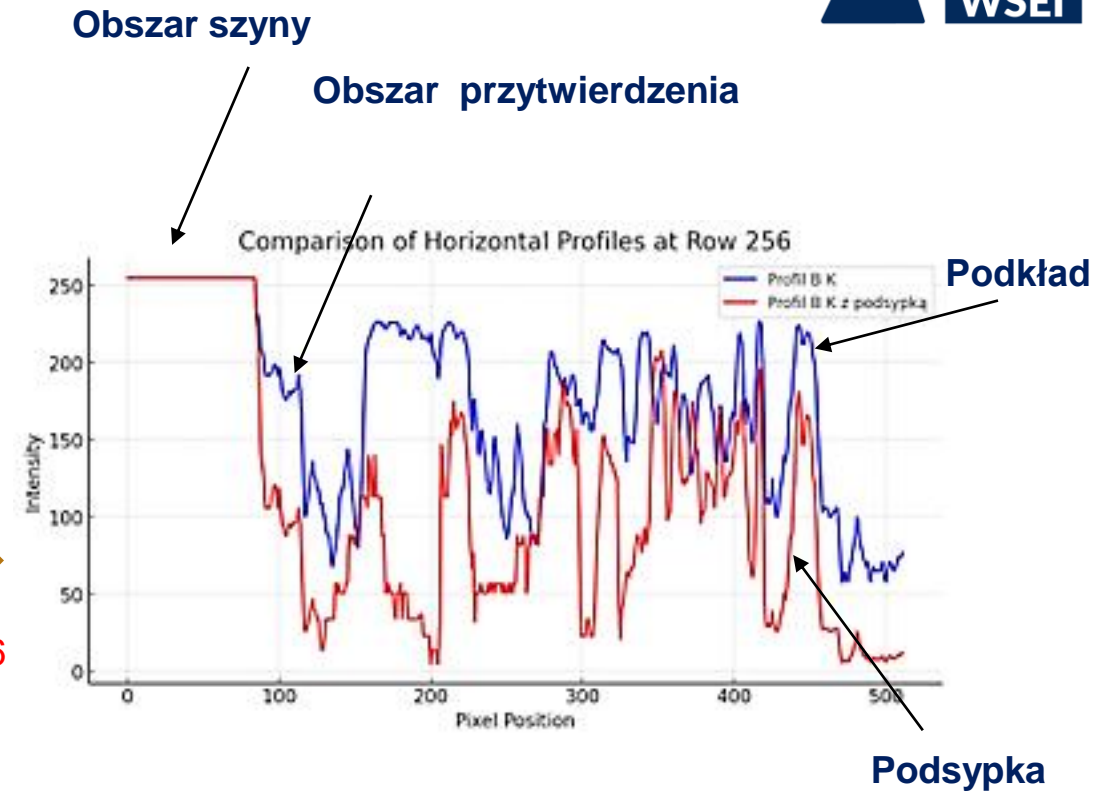
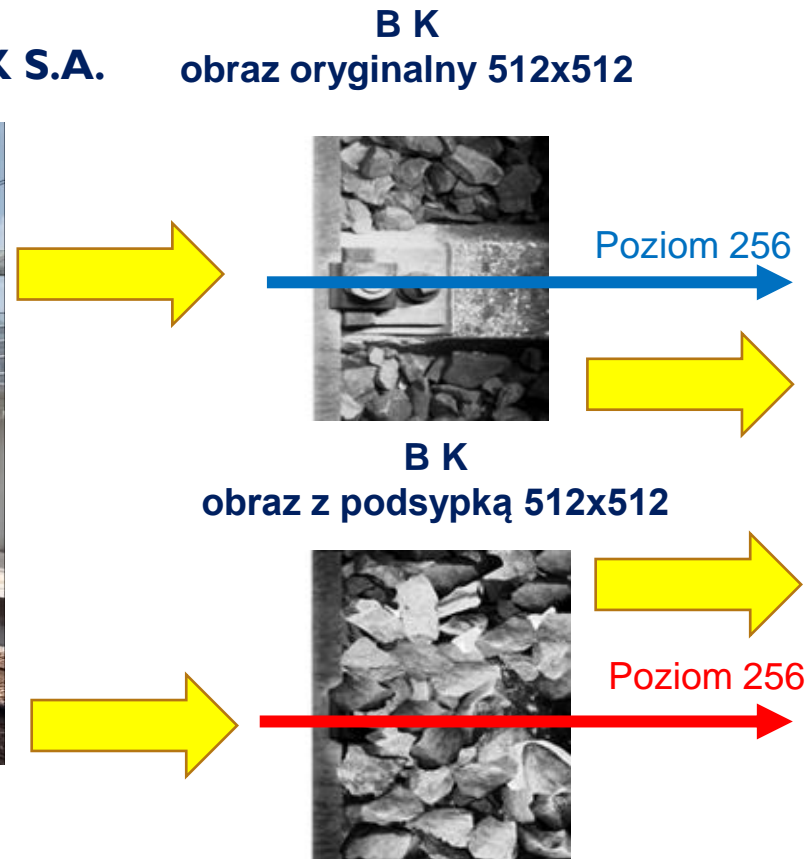
Lubelska Akademia WSEI

INFRASZYN 2025

1. Badania wizyjne drezyną pomiarową wybranych odcinków nawierzchni kolejowej, obejmujące obszary szyn, przytwierdzeń oraz podkładów (każdy typ odpowiednio utrzymanego przytwierdzenia – K, SB, SKL, betonowe podkłady B i drewniane D). Obraz w odcieniach szarości, 8-bitowy, z zakresem amplitudy od 0 do 255.
2. Ponowne badania tych samych fragmentów toru po uzupełnieniu podsypki.
3. Preprocesing obrazów – usunięcie wpływu oświetlenia (wyrównanie histogramu), poprawa kontrastu metodą CLAHE (adaptacyjna), korekcja wymiarów obrazów do 512x512 pikseli oraz binaryzacja z wykorzystaniem metody OTSU (automatyczne ustalanie progu).
4. Wyznaczenie profili poprzecznych wzdłuż podkładów dla pięciu kombinacji (podkład + przytwierdzenie + szyna), przed i po uzupełnieniu podsypki oraz obliczenie ich różnicy absolutnej.
5. Obliczenie i wizualizacja lokalnych wymiarów fraktalnych profilu różnicowego metodą „pudełkowego zliczania” (box-counting) – porównanie z innymi algorytmami (Higuchiego i wariacyjną).
6. Analiza parametrów matematycznych fraktalności lokalnej profilu różnicowego - krytyka.
7. Analiza falkowa lokalnych fraktalności profilu różnicowego wraz ze szczegółową analizą i interpretacją wykresów.
8. Podsumowanie - możliwości praktycznego zastosowania.

ZAKRES BADAŃ WIZYJNYCH

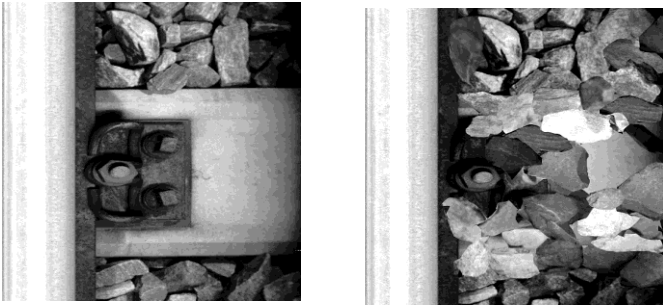
Drezyna pomiarowa DPD 560
Centrum Diagnostyki PKP PLK S.A.



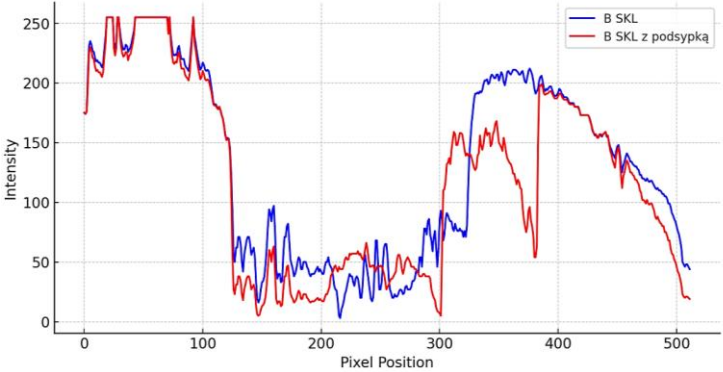
Cykl badawczy:

1. Rejestracja obrazu przed uzupełnieniem podsypki.
2. Uzupełnienie podsypki.
3. Rejestracja obrazu po wykonaniu prac.
4. Analiza porównawcza za pomocą profili różnicowych.

B SKL



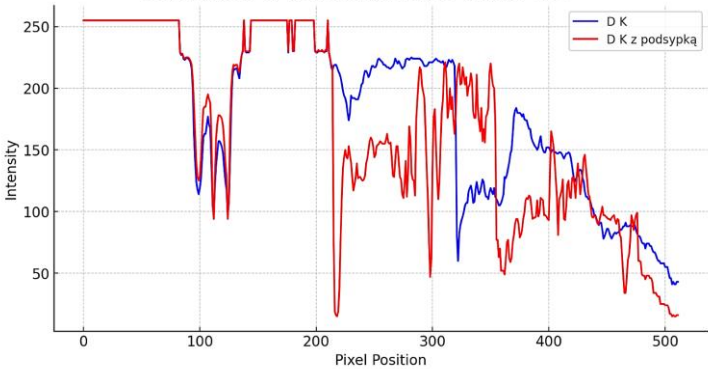
Comparison of Horizontal Profiles at Row 256



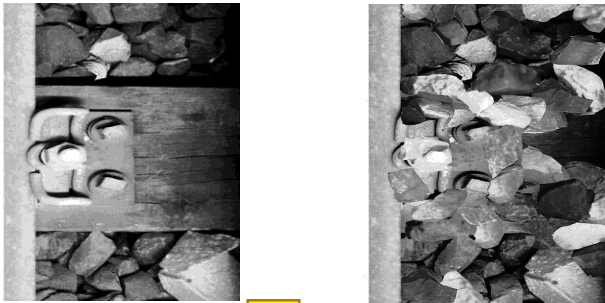
D K



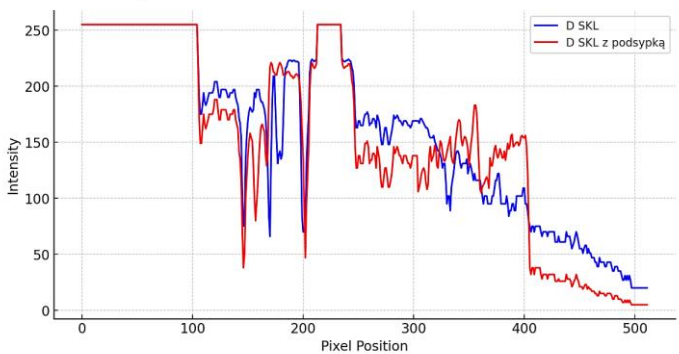
Comparison of Horizontal Profiles at Row 256



D SKL



Comparison of Horizontal Profiles at Row 256



FRAKTALNY WYMIAR OBRAZU – METODA PUDEŁKOWA

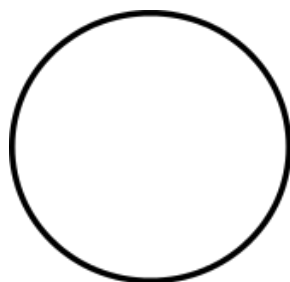
Do obliczenia fraktalnego wymiaru analizowanego fragmentu profilu, wykorzystano **metodę pudełkowego zliczania (box-counting)**. Wykorzystuje ona hierarchiczne pokrycie struktury kwadratowymi „pudełkami” o różnych skalach, a następnie bada się, jak liczba tych pudełek zmienia się wraz z ich rozmiarem, gdzie $N(s)$ jest liczbą pudełek pokrywających strukturę, a s skala pudełek. Wykreślenie zależności logarytmicznej $N(s)$ vs $\log 1/s$ - pozwala na wyznaczenie wymiaru fraktalnego FD :

$$FD = \frac{\log N(s)}{\log(1/s)} \iff FD = - \frac{\log N(s)}{\log s}$$

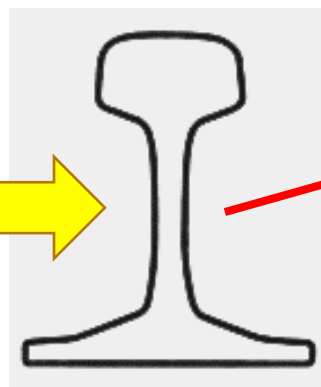
Interpretacja nachylenia $D \sim 1$, struktura bliska prostej linii, $D \sim 2$, struktura jest bardziej chaotyczna i nieregularna



$FD = 1.18$



$FD = 1.23$

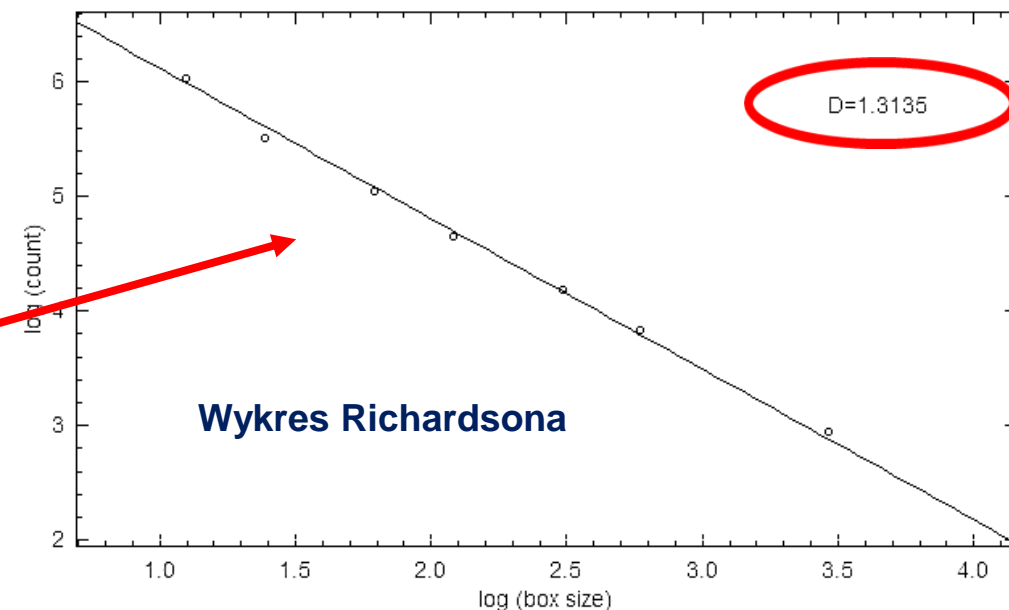


$FD = 1.31$

Results											
File	Edit	Font	Results								
	Label	C2	C3	C4	C6	C8	C12	C16	C32	C64	D
1	Szyna	741	414	246	155	104	66	46	19	7	1.31349290



Symbole typu C2, C4, ... C64 oznaczają kolejne wielkości kwadratów w pikselach przy analizie fraktalnej metodą box-counting



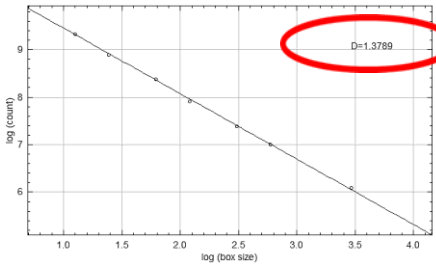
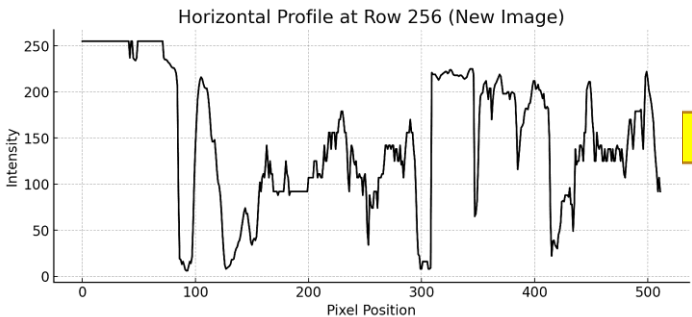
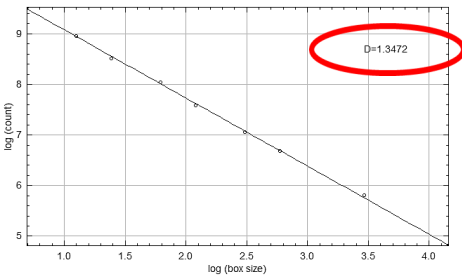
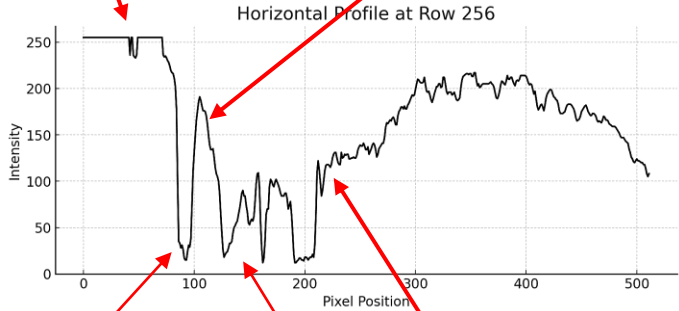


B SB



Ślad na szynie

Wkładka dociskowa



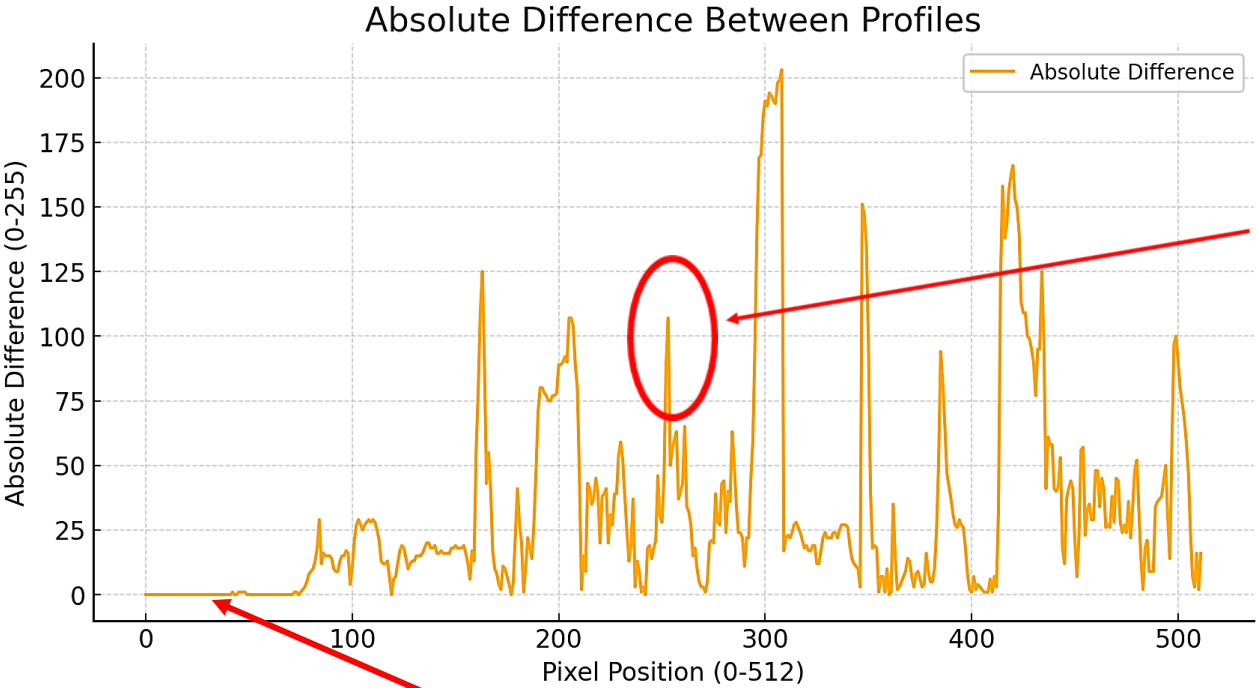
Stopka szyny
Łapka sprężysta
Początek podkładu

Podobne wartości FD dla obydwu profili !

Results											
File Edit Font Results											
	Label	C2	C3	C4	C6	C8	C12	C16	C32	C64	D
1	BSBwyrównanyhistogramprofil	13690	7803	4982	3099	1965	1168	801	333	133	1.34719952

Results											
File Edit Font Results											
	Label	C2	C3	C4	C6	C8	C12	C16	C32	C64	D
1	BSBzpodsykawyrownanyhistogramprofil	20403	11306	7196	4342	2730	1614	1095	443	166	1.37888808

B SB



Pixel Position	Profile 1 Amplitude	Profile 2 Amplitude	Absolute Difference
252	138	49	89
253	141	34	107
254	138	88	50
255	134	78	56

Interpretacja

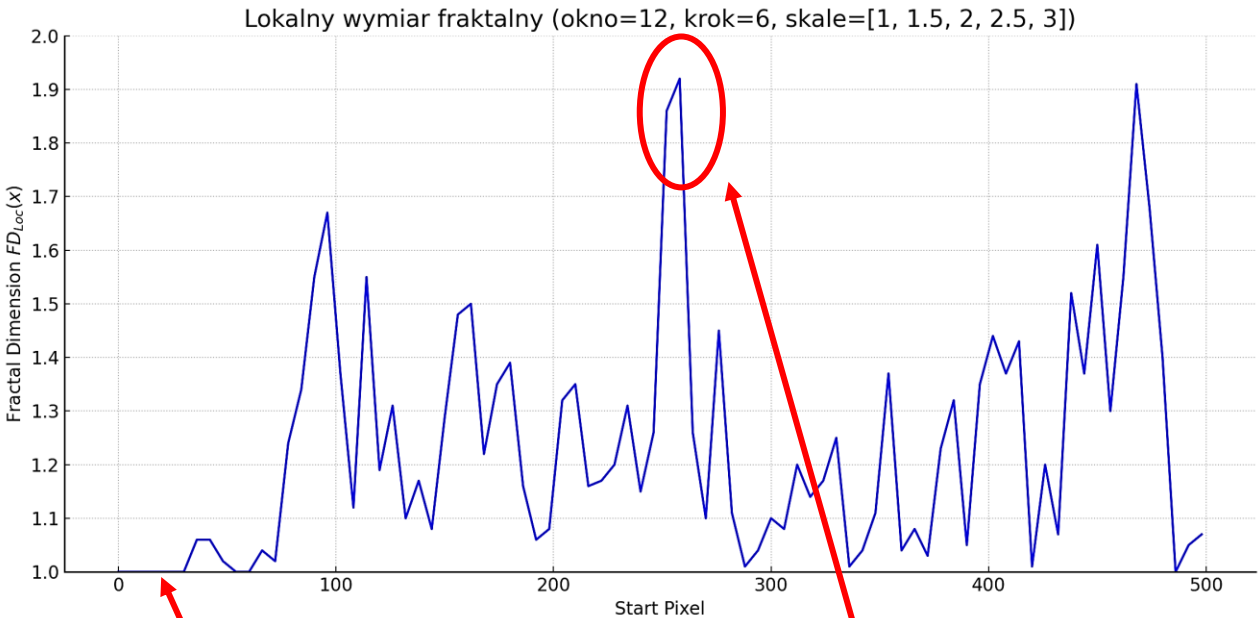
Wykres różnicy profili pokazuje, gdzie wzdłuż linii poziomej występują największe zmiany:

- Obszary, gdzie wartość wynosi 0** → brak zmian pomiędzy profilami (np. główka szyny).
- Obszary o wysokich wartościach** → oznaczają miejsca, gdzie obraz został istotnie zmieniony (np. dodanie podsypki).

Pixel Position	Profile 1 Amplitude	Profile 2 Amplitude	Absolute Difference
0	255	255	0
1	255	255	0
2	255	255	0

WYKRES LOKALNYCH WYMIARÓW FRAKTALNYCH RÓŻNICY PROFILI

Zamiast jednej globalnej miary (FD) oblicza się **lokalny wymiar fraktalny (profil fraktalny)** w oknie przesuwanym wzdłuż profilu –algorytm pudełkowy



	Start Pixel	Fractal Dimension		
1	0	1.0	252	1.86
2	6	1.0	258	1.92
3	12	1.0	264	1.26
4	18	1.0	270	1.1

Algorytm obliczania lokalnej fraktalności $FD_{Loc}(x)$

1. Podział profilu różnicowego na okna

- Wybieramy okno o długości 12 pikseli, które przesuwamy co 6 pikseli wzdłuż profilu różnicowego.
- Każde okno obejmuje fragment profilu:

$$\{p(x), p(x+1), \dots, p(x+11)\}$$

gdzie:

- $p(x)$ to wartość profilu różnicowego w punkcie x .

2. Obliczanie „długości” krzywej profilowej dla różnych skal

- Dla każdego analizowanego okna przyjmujemy zestaw skal:

$$s = \{1, 1.5, 2, 2.5, 3\} \quad [\text{w pikselach}]$$

- Dla każdej skali s wykonujemy następujące operacje:

a) W obrębie okna „skaczemy” co s pikseli, uzyskując punkty:

$$\{p(x_i), p(x_i + s)\}$$

b) Obliczamy długość krzywej profilowej dla skali s :

$$L(s) = \sum_i \sqrt{s^2 + [p(x_i + s) - p(x_i)]^2}$$

Sumujemy długości wszystkich odcinków w oknie.

3. Wyznaczenie lokalnej fraktalności $FD_{Loc}(x)$

- Przyjmujemy fraktalną zależność skalowania:

$$L(s) \sim s^{FD_{Loc}(x)}$$

- Po zlogarytmowaniu zależność ta przyjmuje formę liniową:

$$\log(L(s)) \approx FD_{Loc}(x) \log(s) + \text{const}$$

- Wykonujemy regresję liniową w przestrzeni:

$$(\log(s), \log(L(s)))$$

Z regresji liniowej otrzymujemy wartość nachylenia prostej m , co bezpośrednio daje nam wartość lokalnej fraktalności:

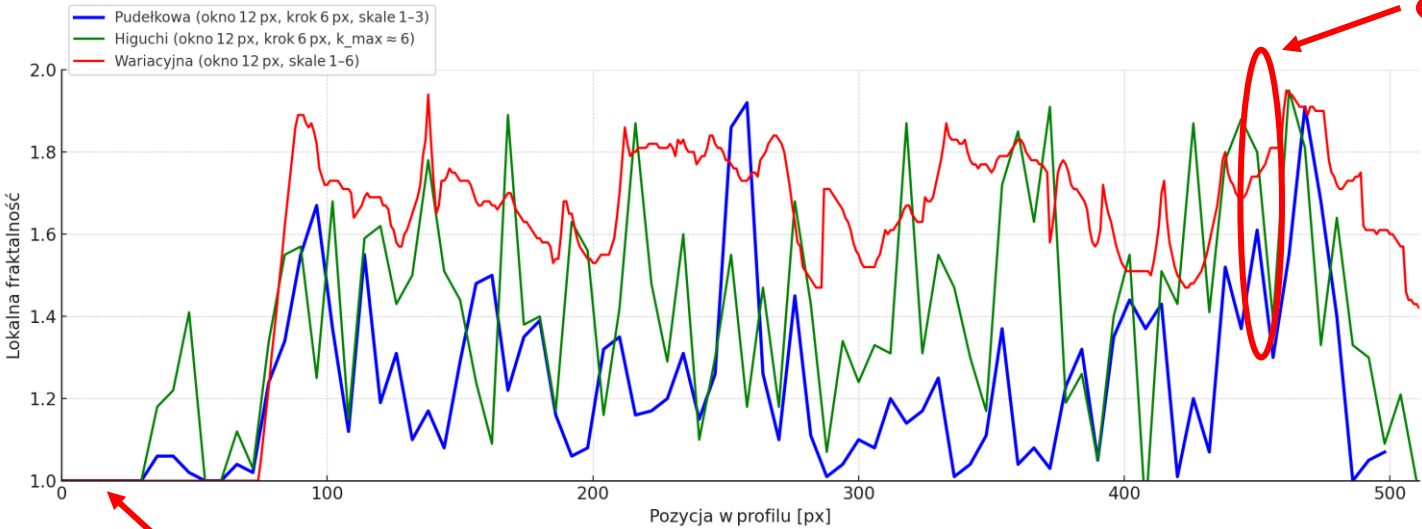
$$FD_{Loc}(x) = m$$

4. Naniesienie wyników na wykres

- Obliczamy wartość $FD_{Loc}(x)$ dla każdego okna.
- Otrzymane wartości nanosimy na wykres w funkcji pozycji początkowego piksela okna (x na osi poziomej), a wartości $FD_{Loc}(x)$ na osi pionowej.

Porównanie algorytmów pudełkowego, Higuchiego i wariacyjnego

Porównanie lokalnych wymiarów fraktalnych – pełne parametry



450	1.61	1.8	1.74
451			1.75
452			1.76
453			1.77
454			1.79
455			1.81
456	1.3	1.39	1.81
457			1.81

	FD_box	FD_Higuchi	FD_variation
0	1.0	1.0	
1			1.0
2			1.0
3			1.0
4			1.0
5			1.0
6	1.0	1.0	1.0
7			1.0

Parametr	Formuła	Wartość	Interpretacja
Średnia wartość (MEAN)	$\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$	1.24	Średnia lokalna fraktalność obrazu MEAN sugeruje umiarkowaną nieregularność i chropowatość profilu różnicowego - wartość ta jest pomiędzy 1 (struktura gładka, regularna) a 2 (bardzo nieregularna, chaotyczna struktura).
Odchylenie standardowe (SD)	$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2}$	0.21	Stosunkowo niskie SD oznacza, że wartości lokalnej fraktalności są skupione blisko średniej, a więc większość fragmentów profilu ma podobną fraktalność. Brak dużych skoków w wartości fraktalności wskazuje na stosunkowo jednorodny charakter zmian w strukturze profilu różnicowego.
Skośność (Skewness, γ_1)	$\gamma_1 = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^3}{\sigma^3}$	0.45	Dodatnia skośność γ_1 oznacza, że rozkład wymiaru fraktalnego ma długi ogon w prawo (sporo wartości bliskich dolnej granicy, a kilka dużych).
Kurtoza (Kurtosis, γ_2)	$\gamma_2 = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^4}{\sigma^4} - 3$	-0.22	$\gamma_2 < 0$ (platokurtyczny rozkład) oznacza, że rozkład wartości fraktalności jest spłaszczony – nie zawiera dużej ilości wartości odstających i jest bardziej jednolity.
Entropia Shannona (H)	$H = - \sum_i p_i \log_2 p_i$	3.87	Duża wartość H sugeruje umiarkowaną różnorodność struktur lokalnych, co oznacza, że: <ul style="list-style-type: none">• profil różnicowy nie jest jednolity – zawiera pewne lokalne nieregularności,• zmienność struktur w obrazie nie jest jednak skrajnie chaotyczna.

Wnioski

Parametry matematyczne wykazują, że dodanie podsypki do toru kolejowego wprowadziło **wyraźnie zauważalną nieregularność w strukturze lokalnych wymiarów fraktalnych**, ale te zmiany są **równomierne i kontrolowane**, bez gwałtownych anomalii. Oznacza to, że powierzchnia podsypki jest **naturalnie nieregularna**, ale bez nieoczekiwanych, wyraźnych artefaktów.

Wyniki obliczeń zbyt ogólnikowe do szczegółowej analizy !

. Podstawy

Transformata falkowa (**Wavelet Transform**, WT) to metoda pozwalająca na analizę profilu w dwóch domenach jednocześnie – przestrzennej i częstotliwościowej (skalowej). Daje pełen obraz lokalnej struktury na różnych poziomach szczegółowości, co czyni ją niezwykle skuteczną metodą analizy profili w praktyce fraktalnej.

W przypadku lokalnej fraktalności $FD_{Loc}(x)$, transformata falkowa ciągła (**CWT**, Continuous Wavelet Transform) definiowana jest jako:

$$W_{FD_{Loc}}(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} FD_{Loc}(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} \psi \left(\frac{x-b}{a} \right) dx$$

- $W_{FD_{Loc}}(a, b)$ – współczynnik transformaty falkowej dla funkcji lokalnej fraktalności w skali a i przy przesunięciu b ;
- $FD_{Loc}(x)$ – lokalna fraktalność (ang. *Local Fractal Dimension*) jako funkcja zmiennej x ;
- $\psi \left(\frac{x-b}{a} \right)$ – funkcja bazowa (fala matka) przeskalowana i przesunięta;
- $\frac{1}{\sqrt{a}}$ – normalizacja energii w różnych skalach;
- a – skala (im mniejsza, tym dokładniejsze odwzorowanie lokalnych cech);
- b – pozycja (przesunięcie) analizowanej funkcji;
- x – zmienna niezależna (np. przestrzeń lub czas).

Podstawy

W analizie profili transformata falkowa jest szczególnie użyteczna, gdyż pozwala na precyzyjne wykrycie i analizę:

- lokalnych nierówności (np. pęknięć, uskoków),
- struktury fraktalnej (określenie lokalnych wymiarów fraktalnych),
- zmian okresowości profilu w różnych skalach.

W praktyce wybiera się zestaw skal (od małych do dużych) i oblicza wartości $W_{FD_{Loc}}(a, b)$, które opisują, jak silnie falka dopasowuje się do profilu lokalnie i na danej skali.

Etapy obliczeń praktycznych

1. Wybór falki $\psi(x)$,
2. Określenie zakresu skal a ,
3. Obliczenie współczynników $W_{FD_{Loc}}(a, b)$
4. Identyfikacja dominant na poszczególnych skalach,
5. Rekonstrukcja profilu (jeśli potrzeba) lub interpretacja wyników (np. ocena fraktalności).

Falka Meksykański Kapelusz – Mexican Hat Wavelet

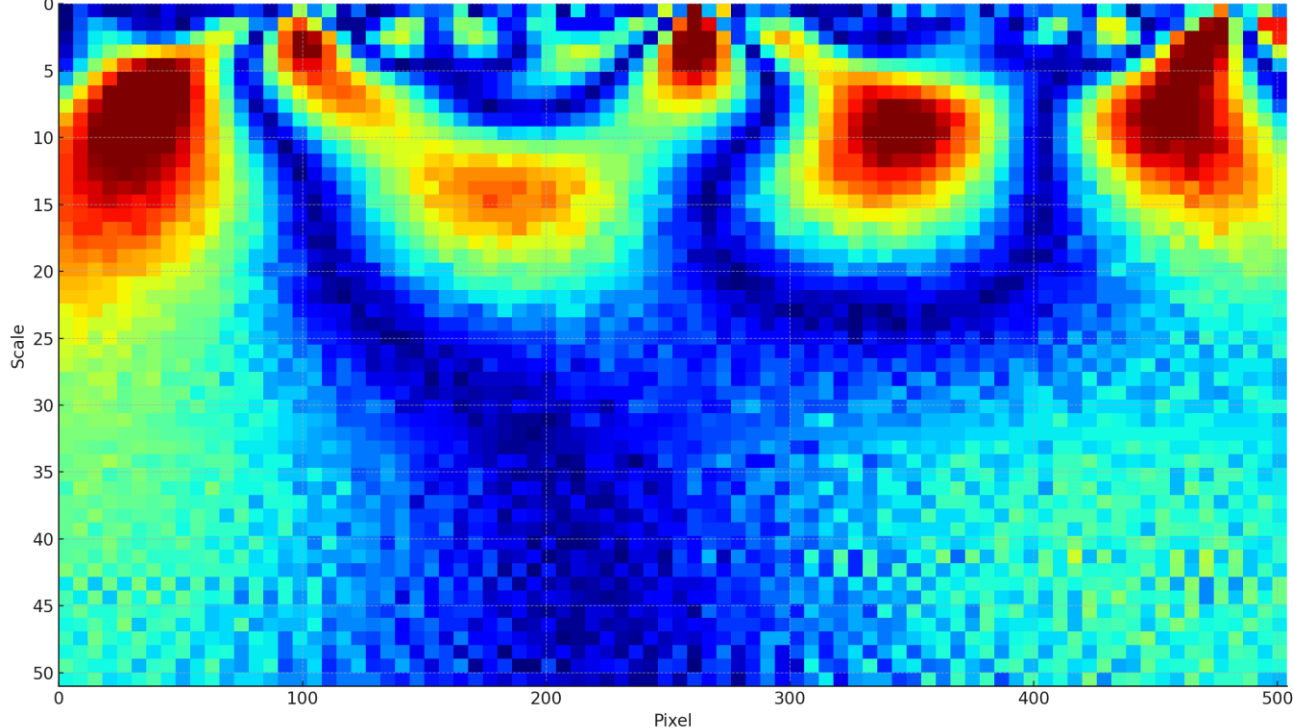
Falka meksykański kapelusz (będąca drugą pochodną Gaussa) wyróżnia się dobrą lokalizacją w przestrzeni i częstotliwości, zerową średnią, a także czułością na lokalne zmiany kształtu profilu, co czyni ją uniwersalnym narzędziem analizy fraktalnej, detekcji krawędzi/pików, czy ogólnie – analizy wieloskalarnej.

$$\psi_{MH}(x) = \frac{2}{\sqrt{3}\sigma\pi^{1/4}} \left(1 - \frac{x^2}{\sigma^2}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

1. Interpretujemy x jako współrzędną przestrzenną (np. indeks piksela w profilu).
2. Dla różnych skal σ „rozciągamy” falę, co odpowiada wyszukiwaniu struktur o różnej szerokości w profilu.

Mapa transformaty falkowej wykonana przy użyciu falki Mexican Hat

Mapa CWT (Mexican Hat) fraktalności lokalnej profilu różnicowego
Skale 1-50



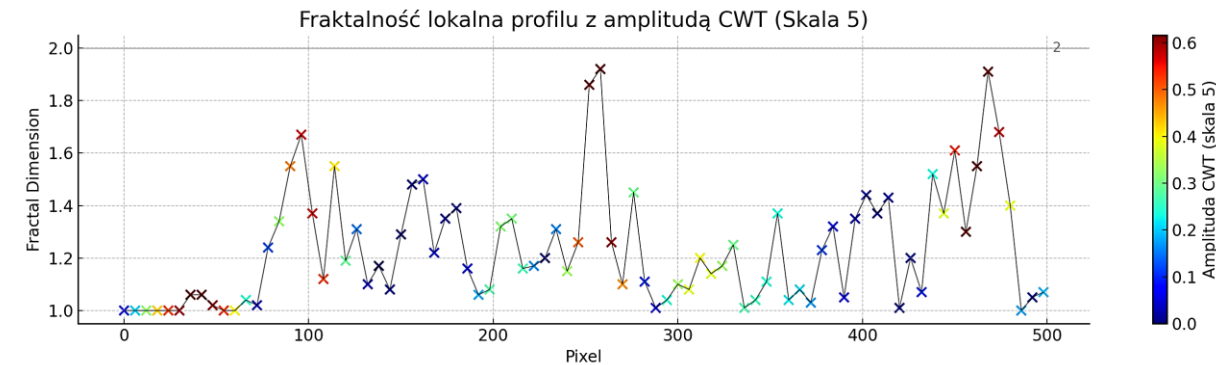
Kolor	Znaczenie	Wartość amplitudy
Granatowy / Niebieski	Brak lub bardzo mała zgodność falki z sygnałem	~0
Jasnoniebieski / Zielony	Słaba lub umiarkowana struktura	~10–30% maksymalnej amplitudy
Żółty	Silniejsza struktura	~60–80% maks
Czerwony	Bardzo wysoka zgodność (maksimum lokalne)	blisko wartości <code>vmax</code> (np. 0.6)

Skala	Opis działania falki
1–5	bardzo drobne struktury (np. „szum” lub ostre krawędzie)
6–15	małe detale, lokalne przejścia i zmienność fraktalności
16–30	struktury średnie – lokalna nieregularność rozciągnięta w czasie/pikselach
31–50	duże skale – trend, ogólna struktura, powolne zmiany

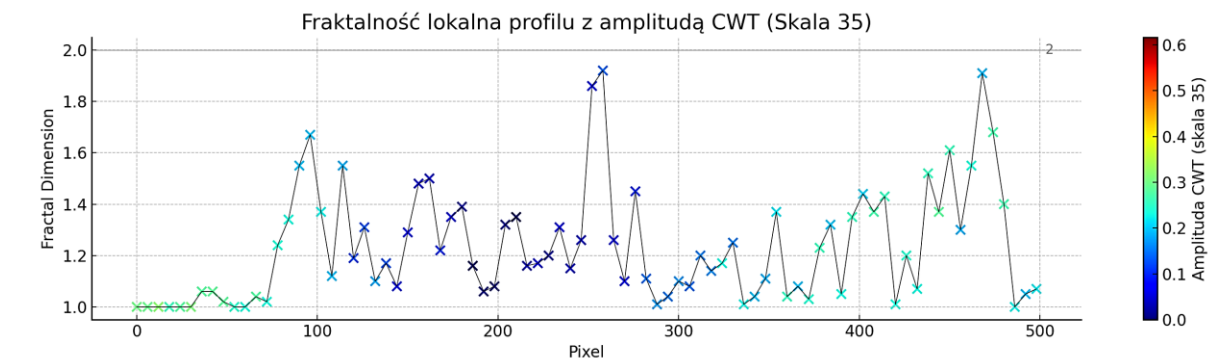
ANALIZA FALKOWA LOKALNEJ FRAKTALNOŚCI PROFILU RÓŻNICOWEGO

Badanie współczynników falkowych w różnych skalach

Dominanta CWT 0.043 ± 0.2
(znaczące odchylenie standardowe)

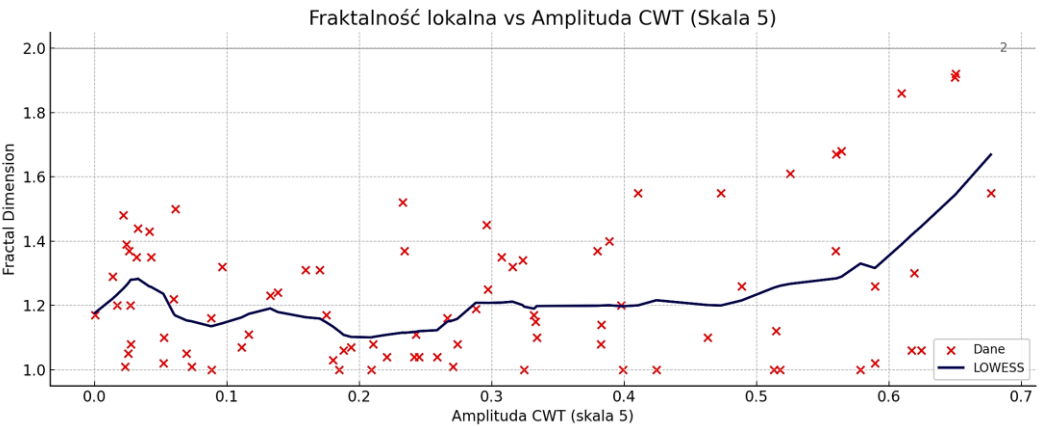


Dominanta CWT 0.18 ± 0.084 (niewielkie odchylenie standardowe)

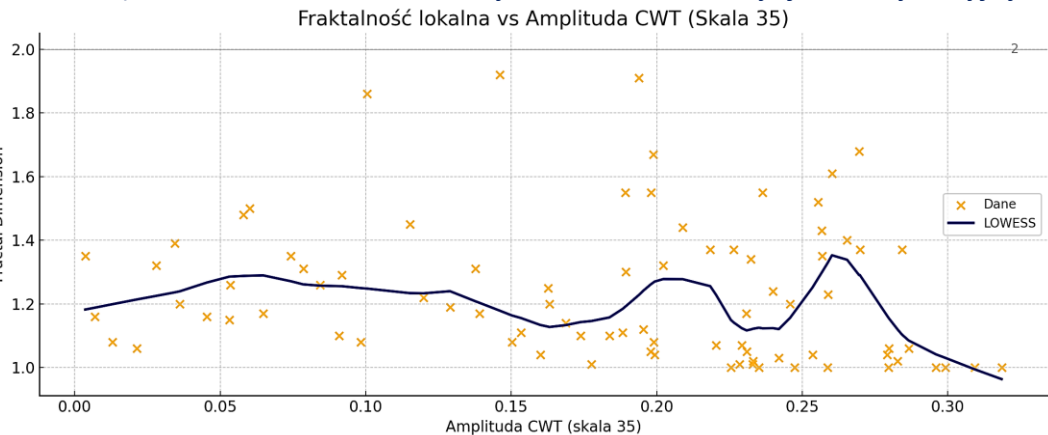


Właściwość	Skala 5	Skala 35
Zasięg detekcji	Bardzo lokalny (mikrostruktury, kilkupikselowe nieregularności)	Średnio-duży zasięg (rozleglejsze struktury geometryczne)
Charakter obserwowanych zmian	Punktowe skoki, szum, pojedyncze defekty	Długofalowe, szerokie nieregularności
Zastosowanie praktyczne	Detekcja mikrouszkodzeń: pęknięcia, brud, szlifowanie punktowe	Ocena deformacji toru: ugięcia, osiadanie, nierównomierność podsypki
Ryzyko fałszywych alarmów	Wysokie – duży rozrzut może wskazywać też szum	Niskie – dobrze wyodrębnione obszary anomalii

Amplitudy CWT przy skali 5, wyraźnie są skorelowane z fraktalnością → wrażliwość na mikrouszkodzenia toru. **Zastosowanie:** kontrola jakości powierzchni toru, wczesna diagnostyka defektów przed rozwinieniem się w poważniejsze problemy — skuteczna w inspekcji i prewencji.



Amplituda CWT przy skali 35, lepiej odpowiada rozległym deformacjom, jak → osiadanie podtorza, nierówna podsypka, nieciągłość geometrii szyn. **Zastosowanie:** kontrola geometrii toru, ocena stanu infrastruktury, wybór miejsc do korekty torowiska lub robót ziemnych - ważna w decyzjach inżynierskich.



Współczynnik determinacji

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n \left(FD_{Loc}(x_i) - \hat{FD}_{Loc}(x_i) \right)^2}{\sum_{i=1}^n \left(FD_{Loc}(x_i) - \overline{FD}_{Loc} \right)^2}$$

- R^2 – współczynnik determinacji; miara dopasowania modelu do danych;
- $FD_{Loc}(x_i)$ – wartość lokalnej fraktalności w punkcie x_i (obserwacja rzeczywista);
- $\hat{FD}_{Loc}(x_i)$ – wartość przewidywana przez model w punkcie x_i ;
- \overline{FD}_{Loc} – średnia wartość lokalnej fraktalności dla wszystkich punktów x_i ;
- n – liczba punktów pomiarowych lub próbek.

LOWESS (Locally Weighted Scatterplot Smoothing) – lokalnie ważona regresja

	Skala	R ² (LOWESS)	Śr. szerokość CI (95%)
1	5	0.2357	0.0835
2	35	0.1586	0.0865

Wąski przedział ufności → stabilna aproksymacja mimo dużego rozrzutu danych



Dla skali $a = 5$:

$$FD_{Loc}(x) = 2,5 - \frac{\ln W_{FD_{Loc}}(5, x)}{\ln 5}$$



Dla skali $a = 35$:

$$FD_{Loc}(x) = 2,5 - \frac{\ln W_{FD_{Loc}}(35, x)}{\ln 35}$$

Cel	Wnioski
Monitoring stanu toru w czasie	Można porównywać profile fraktalności z różnych okresów.
Porównywanie różnych odcinków toru	Wartości FD_{Loc} są lokalne i obiektywne.
Wczesne ostrzeganie o degradacji	Szybki spadek FD_{Loc} może być sygnałem alarmowym.
Optymalizacja prac utrzymaniowych	Pozwala wskazać najbardziej zużyte odcinki, które wymagają interwencji.

Fraktalna analiza nawierzchni

- Lokalny wymiar fraktalny profilu różnicowego dostarcza cennych informacji o nieregularnościach i zmianach w czasie,
- Pomaga w wykrywaniu obszarów potencjalnie najbardziej narażonych na dalsze zużycie lub uszkodzenia.

Transformata falkowa w połączeniu z lokalną fraktalnością

- Umożliwia wieloskalową ocenę zmian, co przekłada się na bardziej precyzyjne wnioskowanie o stanie torowiska.
- Każdy zakres skali jest odpowiedzialny za inną klasę zjawisk (mikro-, mezo-, makro-).

Zastosowania praktyczne

- Monitorowanie degradacji: pozwala na bieżąco śledzić rozwój mikropeęknięć, uskoków, luzów w przytwierdzeniach.
- Optymalizacja konserwacji: dane z analizy fraktalnej i falkowej pomagają ustalić, gdzie i kiedy należy przeprowadzić zabiegi utrzymaniowe.
- Projektowanie torów: przydatna przy określaniu kształtu, doborze podkładów czy podsypki z uwzględnieniem późniejszej ewolucji powierzchni.

Analiza lokalnej fraktalności profilu różnicowego zamiast „średniej gładkości toru” co ma miejsce w przypadku analizy samego profilu różnicowego, odsłania **dokładną, punkt-po-punkcie mapę „niebezpiecznych ziarnistości” nawierzchni** – czytelniejszą, bardziej porównywalną i bezpośrednio związaną z dynamiką toru.

Wzmacnia informację o strukturze uszkodzeń, wskazuje defekty z dużą dokładnością rzędu kilkudziesięciu milimetrów i pozwala porównywać różne odcinki toru z tą samą metryką – czego nie daje surowy profil różnicowy.

Podsumowując, dzięki badaniom lokalnej fraktalności, możliwe jest wspomaganie analiz nawierzchni kolejowej i jej diagnostyka predykcyjna, co przekłada się na oszczędności utrzymaniowe i bezpieczeństwo ruchu kolejowego.

**Autor pragnie podziękować Z-cy Dyrektora Centrum Diagnostyki PKP PLK S.A.
Panu Ludwikowi Madejowi za udostępnienie wyników pomiarowych**

DZIĘKUJĘ PAŃSTWU ZA UWAGĘ

W RAZIE PYTAŃ ZAPRASZAM DO KONTAKTU:
PIOTR.LESIAK@WSEI.PL